Método de Redução do Grau de um Polinômio na Resolução de Equações Polinomiais Reais

Carlos Bruno Barbosa Correia

Conteúdo

1 Definição

Polinômio é toda função f dos complexos nos complexos ($\mathbb{C} \to \mathbb{C}$) que apresenta a seguinte formulação.

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$$

No qual $a_k \in \mathbb{C}$ para todo k natural pertencendo ao seguinte intervalo $[0, n]$, onde n recebe o nome característico de grau do polinômio (podendo ser representado por $gr(f) = n$).

Para fins de dúvida todo a_k com $k > n$ é nulo para que garanta a unicidade do grau do polinômio.

Chamamos z de **raíz** do polinômio caso $f(z) = 0$ dada a configuração de coeficientes existentes.

2 Método

O objetivo desse método é reduzir o grau de um polinômio qualquer, numa equação polinomial, ao se conhecer a soma de quaisquer duas de suas raizes. Fazendo com que você encontre uma outra equação que envolva unicamente o produto entre as raízes (como variável), os coeficientes e a soma entre elas.

Vou começar mostrando para $gr(f) = 3$ que poderia ser facilmente resolvida utilizando *Relação de Girard* para soma e encontrando ao menos uma das raízes e então reduzindo o problema para uma quadrática. Porém estou usando apenas para exemplificar a metodologia encontrada.

2.1 Cúbica

Começarei com uma cúbica reduzida na equação para facilitar nosso trabalho, sabendo que a soma de duas raízes reais distintas x_1 e x_2 resulta em θ.

$$x_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d = 0$$
$$x_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d = 0$$

Eu irei forçar a segunda parcela de ambas as equações ser anulada portanto a primeira equação multiplico por x_2^2 e a segunda por x_1^2. Esse é o principal passo que irá fazer com que alcançe a equação com o produto entre as raízes sendo a variável.

$$x_1^3 \cdot x_2^2 + bx_1^2 \cdot x_2^2 + cx_1 \cdot x_2^2 + d \cdot x_2^2 = 0$$
$$x_1^2 \cdot x_2^3 + bx_1^2 \cdot x_2^2 + cx_1^2 \cdot x_2 + d \cdot x_1^2 = 0$$

Subtraindo a equação de cima pela de baixo.

$$x_1^2 \cdot x_2^2(x_1 - x_2) + cx_1 \cdot x_2(x_2 - x_1) + d(x_2^2 - x_1^2) = 0$$
$$x_1^2 \cdot x_2^2(x_1 - x_2) - cx_1 \cdot x_2(x_1 - x_2) - d(x_1^2 - x_2^2) = 0$$

Imediato que $x_1 - x_2 \neq 0$ já que são raízes distintas, portanto

$$x_1^2 \cdot x_2^2 - cx_1 \cdot x_2 - d(x_1 + x_2) = 0$$

Chamando $x_1 \cdot x_2 = \delta$ obtemos a expressão quadrática final em função de δ.

$$\delta^2 - c\delta - d\theta = 0$$

O fato é que ela pode apresentar mais de uma solução para δ portanto deve ser testada junto com a informação que $x_1 + x_2 = \theta$ para encontrar a única opção matematicamente correta. Pois a outra resultará em um número complexo o que não é correto já que as duas raízes consideradas são reais e portanto seu produto também será.

Uma coisa interessante disso é que caso a informação da soma estiver certa o discriminante dessa equação final deve ser ao mínimo maior ou igual a zero. Demonstrando o seguinte fato:

$$c^2 + 4d\theta \geq 0 \therefore \theta \geq \frac{-c^2}{4d}$$

2.2 Exemplo

Escolherei uma cúbica reduzida simples

$$x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0$$

Sabendo que a soma de duas raízes reais distintas vale $\theta = 6$. Portanto aplicamos na fórmula demonstrada para encontrarmos os possíveis valores para seu produto.

$$\delta^2 - c\delta - d\theta = 0$$

$$\delta^2 - 17\delta + 60 = 0$$

$$\Delta = 17^2 - 4 \cdot 1 \cdot 60 = 49 = 7^2$$

Um possível valor para o produto é $x_1 = \dfrac{17+7}{2} = 12$ e o outro $x_2 = \dfrac{17-7}{2} = 5$.

De cabeça da para perceber que não existe numeros reais distintos tal que $x_1 + x_2 = 6$ e $x_1 \cdot x_2 = 12$. Porém vou fazer a prova utilizando uma quadrática novamente.

$$x_2 = 6 - x_1 \Rightarrow x_1(6 - x_1) = 12 \Rightarrow x_1^2 - 6x_1 + 12 = 0$$

O Δ nesse caso é igual a -12 portanto uma das raízes seria imaginária, contradizendo a nossa informação que são duas raízes reais distintas.

Então finalizamos encontrando x_1 e x_2 utilizando que $\delta = 5$.

$$x_1^2 - 6x_1 + 5 = 0$$

Encontrando 5 e 1 como as duas raízes que satisfazem a equação e a condição inicial de soma.

Para ficar completo só dividir ambos os lados por $(x-1)(x-5)$ e acabar encontrando uma equação de 1 grau que mostrará a última raiz faltando, que nesse caso seria 2.

2.3 Extensão

Esse método se extende para qualquer equação polinomial caso você saiba a soma de duas raízes reais distintas. Porém cada vez mais fica trabalhoso algebricamente e possa ser que não auxilie tanto quando outras metodologias.

Porém é sempre bom mostrar essas ideias porque pode ser de proveito para alcançar coisas mais complexas e completas. Qualquer sugestão ou feedback pode me contatar pelo discord Ludwig#4351.