Progressão Aritmética - Tópicos Extras

Carlos Bruno Barbosa Correia

10 de novembro de 2022

Conteúdo

1 Definição

1.1 Sequências

Uma seqûencia de números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pode ser compreendido por uma tupla de n-elementos, simbolizando por: $S = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ no qual diferentemente de um conjunto, a ordem de seus elementos importam na composição geral do problema analisado.

Considere $\#S$ o número de elementos da sequência S e $S(k)$ o k-ésimo elemento da sequência já mencionada. Por último, irei colocar como fato que estudaremos apenas sequências finitas, ou seja, sempre existe um número natural λ que é maior que $\#S$ $(\lambda > \#S)$.

Formalização

Para um leitor que queira formalizar a definição de sequência podemos compreendê-la como uma função S dos naturais em algum subconjunto dos reais.

$$\begin{aligned} S : \mathbb{N} &\to A \subset \mathbb{R} \\ n &\mapsto S(n) \end{aligned}$$

1.2 Progressão Aritmética

Seja S uma sequência de elementos de $A \subset \mathbb{R}$, caso

$$(\exists r \in A : S(k+1) - S(k) = r)(\forall k \in \mathbb{N})$$

diremos que S é uma progressão aritmética, ou melhor, uma PA. Para quem não está muito acostumado com lógica matemática, o que fora exposto significa que para obter o próximo elemento de uma PA você precisa somar uma constante r ao elemento anterior (argumento válido a qualquer elemento a partir do segundo).

Dessa forma:

$$S(2) = S(1) + r$$
$$S(3) = S(2) + r$$
$$S(4) = S(3) + r$$
$$\ldots$$
$$S(k) = S(k-1) + r$$

1.3 Exemplos

$S_1 = (1, 2, 3, 4, ..., 10)$ é uma PA com $S(1) = 1$ e $r = 1$ $S_2 = (2, 4, 6, 8, ..., 20)$ é uma PA com $S(1) = 2$ e $r = 2$ $S_3 = (1, 3, 5, ..., 11)$ é uma PA $S(1) = 1$ e $r = 2$

2 Teoremas Fundamentais

2.1 Termo Geral

O primeiro teorema envolvendo PA que irá ser exposto é o que possibilita o cálculo de $S(k)$ conhecendo apenas $S(1)$ e o valor de r (que convenientemente recebe o nome de razão da PA).

Teorema 1 $S(k) = S(1) + r \cdot (k-1)$ $(\forall k \in \mathbb{N})$

Prova 1 *Utilizando o princípio da indução completa, é imediato que a fórmula se vale para* $S(1)$ *pois* $S(1) + r(1-1) = S(1)$. *Agora nosso objetivo é mostra que se* $S(k) = S(1) + r(k-1)$ *então também é verdade que* $S(k+1) = S(1) + rk$ *utilizando unicamente a nossa hipótese de indução.*

$$S(k+1) = S(k) + r = (S(1) + r(k-1)) + r = S(1) + r(k-1+1) = S(1) + rk$$

Para validar que três valores ordenados podem estar em uma PA o seguinte teorema será de grande proveito

2.2 Teorema do Valor Intermediário/Médio

Teorema 2

$$\frac{S(k+1) + S(k-1)}{2} = S(k) \ (\forall k \in \mathbb{N})$$

Prova 2 *Sabe-se que* $S(k+1) = S(k) + r$ *e que* $S(k) = S(k-1) + r$ *portanto,*

$$r = S(k+1) - S(k) = S(k) - S(k-1) \therefore S(k+1) + S(k-1) = 2S(k) \therefore \frac{S(k+1) + S(k-1)}{2} = S(k)$$

Possivelmente você conhece a história do *Gauss* que diz que enquanto criança, calculou em instantes a soma de todos os números naturais de 1 a 100. Uma das ideias que ele usou para realizar o cálculo se encontra aqui

2.3 Simetria da Soma Clássica

Teorema 3

$$S(x) + S(y) = k \in \mathbb{R} \ (\forall x, y \in \mathbb{N} : x + y = \#S + 1)$$

Prova 3 *Considere o caso base com* $x = 1$ *e* $y = \#S \therefore S(1) + S(\#S) = k$, *agora vamos realizar um incremento em* x *e logo um decremento ordenado em* y.

$$\begin{gathered} x = 2 \ e \ y = \#S - 1 \therefore S(2) + S(\#S-1) = S(1) + r + S(\#S) - r = k \\ x = 3 \ e \ y = \#S - 2 \therefore S(3) + S(\#S-2) = S(2) + r + S(\#S-1) - r = k \\ \cdots \\ x = \#S \ e \ y = 1 \therefore S(\#S) + S(1) = S(1) + S(\#S) = k \end{gathered}$$

O caso acima é uma simplificação para uma simetria maior que eu irei apresentar mais tarde, porém antes preciso mostrar uma propriedade algébrica muito importante.

2.4 Miscelânia Algébrica

Teorema 4

$$S(a+b) = S(a) + rb = S(b) + ra \ (\forall a, b \in \mathbb{N})$$

Prova 4 $S(a) = S(1) + r(a-1)$, $S(b) = S(1) + r(b-1)$, $S(a+b) = S(1) + r(a+b-1)$

$$S(a+b) = S(1) + r(a-1) + rb = S(1) + r(b-1) + ra = S(a) + rb = S(b) + ra$$

Agora sim temos capacidade de demonstrar a simetria geral de uma PA que é bem elegante de se observar e utilizar para facilitar a resolução de problemas que o envolvem.

2.5 Simetria da Soma Geral

Teorema 5

$$S(x) + S(y) = k \in \mathbb{R}\ (\forall x, y \in \mathbb{N} : x + y = a \in \mathbb{N})$$

Prova 5 *$x + y = a \Rightarrow y = a - x \Rightarrow S(x) + S(y) = S(x) + S(a - x) = S(1) + r(x - 1) + S(a) - rx = S(1) - r + rx + S(a) - rx = S(1) + S(a) - r = k$ que é uma constante pois a é um número natural fixo*

Utilizando o *Teorema 4* novamente podemos fazer uma expansão do *Teorema 2*

2.6 Teorema do Valor Intermediário/Médio Geral

Teorema 6

$$\frac{S(k + a) + S(k - a)}{2} = S(k)\ (\forall k, a \in \mathbb{N})$$

Prova 6 *$S(k + a) = S(k) + ra$, $S(k - a) = S(k) - ra$*

$$S(k + a) + S(k - a) = S(k) + ra + S(k) - ra = 2S(k) \therefore \frac{S(k + a) + S(k - a)}{2} = S(k)$$

3 Soma dos Elementos de uma PA

Considere uma progressão aritmética S, chamaremos de soma dos elementos de uma PA o valor de Σ_S:

$$\Sigma_S = \sum_{i=1}^{\#S} S(i)$$

Eu irei apresentar duas demonstrações para a fórmula de Σ_S que envolve unicamente $S(1)$ e $\#S$ que eu chamarei de n por fins de simplificação.

Prova 7

$$\Sigma_S = S(1) + S(2) + \cdots + S(n) = S(n) + S(n - 1) + \cdots + S(1)$$

$$\therefore 2\Sigma_S = (S(1) + S(n)) + (S(2) + S(n - 1)) + ... + (S(p) + S(n + 1 - p))$$

Temos dois casos agora: Seja n impar, a parcela limite $S(p) + S(n + 1 - p)$ será igual a $S(\frac{n+1}{2}) + S(\frac{n+1}{2})$ e caso n par, a parcela limite será igual a $S(\frac{n}{2}) + S(\frac{n}{2} + 1)$ e $S(\frac{n}{2} + 1) + S(\frac{n}{2})$.

De qualquer forma encontraremos sempre pares do tipo $S(\theta) + S(n + 1 - \theta)$ que como já vimos no Teorema 3 serão igual à $S(1) + S(n)$. Logo,

$$2\Sigma_S = (S(1) + S(n)) + (S(1) + S(n)) + \cdots + (S(1) + S(n)) = n(S(1) + S(n))$$

$$\therefore \Sigma_S = (S(1) + S(n)) \cdot \frac{n}{2} = (2S(1) + r(n - 1)) \cdot \frac{n}{2} = nS(1) + \frac{rn(n - 1)}{2}$$

Prova 8 *Para isso utilizarei o princípio da indução completa. Com o caso base é imediato já que* $\Sigma_{S_1} = 1 \cdot S(1) + r \cdot 1(1-1) \cdot \frac{1}{2} = S(1)$. *Agora tenho que mostrar que dado* $\Sigma_{S_k} = kS(1) + \frac{rk(k-1)}{2}$ *para algum* k *qualquer, deve ser válido que* $\Sigma_{S_{k+1}} = (k+1) \cdot S(1) + \frac{rk(k+1)}{2}$.

$$\Sigma_{S_k} + S(k+1) = \Sigma_{S_{k+1}} \therefore \Big(kS(1) + \frac{rk(k-1)}{2}\Big) + \big(S(1) + rk\big)$$
$$= (k+1) \cdot S(1) + \frac{rk(k-1) + 2rk}{2} = (k+1) \cdot S(1) + \frac{rk(k+1)}{2} = \Sigma_{S_{k+1}}$$

4 PA de Segunda Ordem

Até o momento falamos apenas de progressões aritméticas clássicas, que recebem o nome de PA de Primeira Ordem ou simplesmente PA. Porém há casos mais complexos que não obedecem a definição porém se assemelham ao comportamento que estudamos.

Seja $S = (1, 2, 4, 7, 11, \ldots, S(n))$ uma sequência de inteiros e perceba que a mesma verifica as seguintes igualdades:

$$S(2) - S(1) = 1,\ S(3) - S(2) = 2,\ S(4) - S(3) = 3 \text{ e } S(5) - S(4) = 4$$

Ou seja, as razões parciais formam uma PA de razão igual a 1 denotada por $R_S = (1, 2, 3, 4, ..., R_S(n))$. Esse é o exemplo base que irei utilizar para definir formalmente o que seria então uma progressão aritmética de segunda ordem.

Definição 1 R_S *é uma sequência formado pelas razões parciais da sequência* S*, dessa forma* $\#S = n \Leftrightarrow \#R_S = n - 1$

Definição 2 *Dada uma sequência* S*, caso:*

$$(\exists R \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : R_S(k+1) - R_S(k) = R)(\forall k \in \mathbb{N})$$

Chamaremos S *de uma progressão aritmética de segunda ordem, ou melhor,* A_2.

Perceba que se caso $R = 0$ teriamos um caso clássico de progressão aritmética (A_1). Portanto, certas constatações feitas nessa seção podem ser particularizadas para o que ja vimos assumindo tal igualdade.

4.1 Termo Geral

Uma das coisas de mais importância ao se estudar uma sequência de recorrência conhecida é determinar o valor de $S(k)$ sabendo unicamente de parâmetros iniciais como $S(1)$ e k.

No caso de uma A_2 conseguimos determinar $S(k)$ sabendo unicamente $S(1)$, k, R e $R_S(1)$. Para fins de simplificação entenda $R_S(k) = R(k)$.

$$S(2) = S(1) + R(1), S(3) = S(2) + R(2) = S(1) + (R(1) + R(2))$$
$$S(4) = S(1) + (R(1) + R(2) + R(3))$$
$$\ldots$$
$$S(k) = S(1) + (R(1) + \cdots + R(k-1))$$

Perceba que $R(1) + \cdots + R(k-1)$ é a soma dos elementos de uma A_1 que será igual, como já vimos a:

$$R(1)+\cdots+R(n-1)=(n-1)\cdot R(1)+\frac{(n-1)(n-2)\cdot R}{2}$$

Portanto somamos essa expressão à $S(1)$ e obtemos finalmente a expressão do termo geral procurada.

Teorema 7 *Seja S uma A_2 é valido para todo $k \in \mathbb{N}$*

$$S(k)=S(1)+(k-1)\cdot R(1)+\frac{(k-1)(k-2)\cdot R}{2}$$

Para vermos essa fórmula em funcionamento considerarei o nosso caso base $S = (1,2,4,7,11,\ldots,S(n))$

$$S(1)=S(1)+(1-1)\cdot 1+\frac{(1-1)(1-2)\cdot 1}{2}=1$$

$$S(2)=S(1)+R(1)+\frac{(2-1)(2-2)\cdot 1}{2}=1+1=2$$

$$S(3)=S(1)+2\cdot R(1)+\frac{(3-1)(3-2)\cdot 1}{2}=1+2+\frac{2}{2}=1+2+1=4$$

$$S(4)=S(1)+3\cdot R(1)+\frac{(4-1)(4-2)}{2}=1+3+\frac{6}{2}=1+3+3=7$$

$$S(5)=S(1)+4\cdot R(1)+\frac{(5-1)(5-2)}{2}=1+4+\frac{12}{2}=1+4+6=11$$

Como já era de se esperar caso $R = 0$ (uma A_1 disfarçada) teremos que $S(k) = S(1) + (k-1)R(1) = S(1) + r(k-1)$, igual ao *Teorema 1* demonstrado por indução completa.

Talvez você já tenha percebido um certo padrão nas fórmulas de termo geral ao analisar A_1 e A_2. E sim ele é válido para todo tipo de A_n gerando a fórmula *master* que só receberá demonstração mais adiante.

$$S(k)=S(1)+(k-1)\cdot R_1(1)+\frac{(k-1)(k-2)\cdot R_2(1)}{2!}+\frac{(k-1)(k-2)(k-3)\cdot R_3(1)}{3!}+\cdots+\frac{(k-1)(k-2)\ldots(k-n)\cdot R_n(1)}{n!}$$

No qual R_k são as razões parciais que se tornam cada vez mais ímplicitas, quase que como uma análise em pirâmide de todas as razões termo-termo ou razão-razão da progressão aritmética analisada.

Observação 8 *Se você considera um A_2 com contradomínio em $\mathbb{Z}$ é imediato que $S(k) \in \mathbb{Z}$. Dessa forma a fração $\frac{(k-1)(k-2)\cdot R(1)}{2}$ deve ser um inteiro, e a aritmética da divisão inteira garante isso já que:*

$k-1 = 2\cdot q + r$ com $0 \le r < 2$ dessa forma $2\cdot q = k-1-r$ que pode ser tanto $k-1$ quanto $k-2$, ou seja, ao menos uma dessas expressões será $2\cdot q$ que é um múltiplo explícito de $2 (\forall q \in \mathbb{Z})$.

4.2 Soma dos Elementos A_2

Considere S uma A_2. Temos que:

$$S(1) = S(1) + 0 \cdot R(1) + 0 \cdot R$$
$$S(2) = S(1) + R(1) + 0 \cdot R$$
$$S(3) = S(2) + R(2) = S(1) + (R(1) + R(2)) = S(1) + 2 \cdot R(1) + R$$
$$S(4) = S(3) + R(3) = S(3) + R(1) + 2 \cdot R = S(1) + 3 \cdot R(1) + 3 \cdot R$$
$$S(5) = S(4) + R(4) = S(4) + R(1) + 3 \cdot R = S(1) + 4 \cdot R(1) + 6 \cdot R$$
$$\cdots$$
$$S(n) = S(1) + (n-1) \cdot R(1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot R$$

Somando todas as equações acima e reordenando termos semelhantes encontramos a expressão da soma dos elementos que irei novamente chamar de Σ_S

$$\Sigma_S = n \cdot S(1) + \Big(0+1+2+\cdots+(n-1)\Big) \cdot R(1) + \Big(0+0+1+3+6+\cdots+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\Big) \cdot R$$

Para podermos avançar é necessário saber como calcular

$$\Big(1+3+6+...+\cdots+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\Big)$$

Que equivale ao seguinte somatório $p = \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)(i-2)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2 - 3i + 2$

$$p = \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} -3i + \sum_{i=1}^{n} 2)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \Big(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3\frac{n(n+1)}{2} + 2n\Big)$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1) - 9n(n+1) + 12n}{12}$$
$$= \frac{n(2n^2 + 3n + 1 - 9n - 9 + 12)}{12}$$
$$= \frac{n(2n^2 - 6n + 4)}{12} = \frac{n(n^2 - 3n + 2)}{6}$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

Logo,

$$\Sigma_S = n \cdot S(1) + \frac{n(n-1)}{2} \cdot R(1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \cdot R$$

Teorema 9 *Seja S uma A_2, a soma dos elementos da sequência simbolizado por Σ_S será dada pela expressão:*

$$\Sigma_S = n \cdot S(1) + \frac{n(n-1)}{2} \cdot R(1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \cdot R$$

Perceba novamente a sutileza dessa conclusão ao se considerar $R = 0$ (uma A_1 disfarçada). Encontramos a expressão simplificada

$$\Sigma_S = n \cdot S(1) + \frac{nR(1)(n-1)}{2} = n \cdot S(1) + \frac{nr(n-1)}{2}$$

Exatamente como concluimos nas *provas 7 e 8* da seção *3*.

5 Análise Polinomial

5.1 Soma A_1

Lembrando que a soma dos elementos de uma A_1 é dado pela seguinte formula:

$$\Sigma_S = nS(1) + \frac{rn(n-1)}{2} = n \cdot \left(S(1) - \frac{r}{2}\right) + n^2 \cdot \frac{r}{2}$$

A qual podemos compreender como um polinômio de grau 2 com termo independente nulo. Dessa forma, $\Sigma_S = an + bn^2$ para $a, b \in \mathbb{R}$. Logo, ao nos depararmos com uma A_1 qualquer não é necessário gravar qualquer fórmula, apenas o cálculo de um sistema linear 2x2.

Vamos considerar o caso mais simples $S = (1, 2, 3, 4, \ldots, S(n))$

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + 4b = 3 \end{cases}$$

$2a + 2b = 2$ e $2a + 4b = 3 \therefore 2b = 3 - 2 = 1 \therefore b = \frac{1}{2}$ e $a = 1 - b = \frac{1}{2}$

O que condiz com a teoria exposta já que $b = \frac{r}{2} = \frac{1}{2}$ e $a = S(1) - \frac{r}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$\Sigma_S = \frac{1}{2} \cdot n + \frac{1}{2} \cdot n^2$$

Utilizando esse mesmo raciocinio podemos chegar numa formula de Σ_S que envolva unicamente $S(1)$ e $S(2)$ que geralmente serão dados.

$$\begin{cases} a + b = S(1) \\ 2a + 4b = S(1) + S(2) \end{cases}$$

$\therefore 2b = S(1) + S(2) - 2 \cdot S(1) = S(2) - S(1) \therefore b = \frac{S(2) - S(1)}{2}$ como também $a = S(1) - b = S(1) - \frac{S(2) - S(1)}{2} = \frac{2S(1) - S(2) + S(1)}{2} = \frac{3S(1) - S(2)}{2}$

$$\Sigma_S = \frac{3S(1) - S(2)}{2} \cdot n + \frac{S(2) - S(1)}{2} \cdot n^2$$

5.2 Termo Geral A_2

Utilizando o mesmo raciocínio algébrico da última sub-seção podemos pensar na expressão do termo geral de uma A_2 como um polinômio de grau 2, mas nesse caso com o termo independente não obrigatoriamente nulo. $S(k) = an + bn^2 + c$. Ou seja, precisaremos de um sistema linear 3x3 para poder encontrar todos os coeficientes reais.

Considere $S = (1, 2, 4, 7, 11, \ldots, S(n))$

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 2a + 4b + c = 2 \\ 3a + 9b + c = 4 \end{cases}$$

$$(II) - (I) \Rightarrow a + 3b = 1$$

$$(III) - (I) \Rightarrow 2a + 8b = 3$$

$\therefore\ 2a + 8b - 2a - 6b = 3 - 2 \Rightarrow 2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$, também tem-se que $a = 1 - 3b = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$

Finalmente, $a + b + c = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + c = 1 \Leftrightarrow c = 1$

$$S(k) = 1 - \frac{1}{2} \cdot n + \frac{1}{2} \cdot n^2$$

5.3 Soma A_2

Como já vimos na sub-seção *4.2*, temos que a soma dos elementos de uma A_2 será igual a:

$$\Sigma_S = nS(1) + \frac{n(n-1)}{2} \cdot R(1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \cdot R$$

Podendo ser estudado como um polinômio real de grau 3 na variável $n = \#S$ de termo independente nulo semelhante ao caso de *5.1*.

$$\Sigma_S = an^3 + bn^2 + cn\ , a, b, c \in \mathbb{R}$$

Portanto precisamos de um sistema linear 3x3 para encontrarmos os valores dos três coeficientes.

5.4 Generalização

O objetivo nesse momento é generalizar as ideias expostas acima para o caso geral de uma A_k com $k \in \mathbb{N}_{>2}$.

Sempre precisaremos de um sistema linear kxk para que seja possível determinar tanto o termo geral quanto a soma, e isso se dá simplesmente porque é a partir deles que será possível de forma implicita calcular as razões parciais e então considerar todos os R_1, R_2, $\ldots$, R_{k-1} no resultado final.

Agora, a questão de que nos dois casos sempre encontramos uma expressão polinomial pode se justificar pois quando temos uma A_k as razões parciais diretas estão em uma A_{k-1}. Dessa forma, por indução e um pouco de algebra, concluimos que se A_2 (ou ate mesmo A_1) é válido as ideias acima também será para qualquer A_k com $k \in \mathbb{N}_{>2}$.

5.5 Resumo

O termo geral de uma A_k será uma expressão polinomial em $n = \#S$ com grau k e termo independente não necessariamente nulo.

E a soma dos elementos de uma A_k será uma expressão polinomial em $n = \#S$ com grau $k + 1$ e termo independente necessariamente nulo.

6 Caso Geral

6.1 Termo Geral

Seja S uma A_k com $k \in \mathbb{N}_{>2}$ .Uma identidade necessária para compreender os próximos passos é que $R_w(p) = R_w(p-1) + R_{w+1}(p-1)$, $\forall p \in \mathbb{N}_{>1}$ e $\forall w \in \mathbb{N}$.

$$S(2) = S(1) + R_1(1)$$
$$S(3) = S(2) + R_1(2) = S(2) + R_1(1) + R_2(1) = S(1) + 2 \cdot R_1(1) + R_2(1)$$
$$S(4) = S(3) + R_1(3) = S(3) + R_1(2) + R_2(2) = S(3) + R_1(1) + R_2(1) + R_2(1) + R_3(1)$$
$$= S(1) + 3R_1(1) + 3R_2(1) + R_3(1)$$
$$\dots$$
$$S(n) = S(1) + (n-1) \cdot R_1(1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2!} \cdot R_2(1) + \dots + \frac{(n-1)\dots(n-k)}{k!} \cdot R_k(1)$$

O essencial é perceber que podemos reduzir a expressão $S(k)$ para uma combinação linear de $S(1), R_1(1), R_2(1), \dots, R_k(1)$. E os valores dos coeficientes serão dados utilizando a algebra acima, que reduzem os mesmos para os valores de um termo geral de uma A_p com $p < k$.

Por exemplo, o coeficiente de $R_2(1)$ parte do termo geral de uma A_2. E o coeficiente de uma $R_3(1)$ parte do termo geral de uma A_3. Logo, a regra se da sempre obtendo o coeficiente de $R_p(1)$ por uma A_p.

O termo geral de uma A_p pode ser calculado semelhantemente ao caso do A_2 no qual é necessário o conhecimento da fórmula da soma dos elementos de uma A_1. Portanto, cria-se a ideia de que para calcular o termo geral de uma A_p deve-se conhecer Σ_S de uma A_{p-1} e todas as anteriores (devido a recursão).

6.2 Soma A_k

$$S(1) = S(1) + 0 \cdot R_1(1) + \dots + 0 \cdot R_k(1)$$
$$S(2) = S(1) + R_1(1) + 0 \cdot R_2(1) + \dots + 0 \cdot R_k(1)$$
$$S(3) = S(1) + 2 \cdot R_1(1) + R_2(1) + 0 \cdot R_3(1) + \dots + 0 \cdot R_k(1)$$
$$\dots$$
$$S(n) = S(1) + (n-1) \cdot R_1(1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2!} \cdot R_2(1) + \dots + \frac{(n-1)\dots(n-k)}{k!} \cdot R_k(1)$$

Somando todas as equações acima e reordenando termos semelhantes encontramos a expressão da soma dos elementos que irei novamente chamar de Σ_S.

$$\Sigma_S = nS(1) + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot R_1(1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot R_2(1) + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k)}{(k+1)!} \cdot R_k(1)$$

Como acontece com o termo geral, a expressão Σ_S é uma combinação linear de $S(1), R_1(1), \dots, R_k(1)$. E os coeficientes estão direcionados com o cálculo de soma de elementos de uma A_p. A regra é direta: para calcular o coeficiente de $R_p(1)$ é necessário o cálculo da soma de elementos de uma A_p.

Para fins de formalização, como as A_p encontradas são sempre numéricas é possível resolver por propriedades dos somatórios, igualmente ao que eu fiz em *4.2*. As identidades mais importantes são as três seguintes:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Podem ser provadas facilmente por indução completa nos naturais.

7 Conclusões

Espero que tenha gostado da leitura desse pequeno texto, pois fora feito com bastante dedicação e aprofundamento para se obter a imagem completa do que se pode comprender de uma progressão aritmetica de qualquer ordem. Eu sei que o mesmo não se encontra com uma didática extremamente acessível, mas isso acontece pois o objetivo são tópicos extras avançados acerca do tema; portanto se supõe conhecimento previo consolidado do leitor.

A ideia mais importante na minha opinião para se consolidar desses tópicos é o fato de que sempre podemos resolver um problema de progressão aritmetica reduzindo o mesmo a um sistema linear à priori simples. Outra ideia também importante é compreender que para obtermos fórmulas completas de uma A_k é necessário conhecer todas as fórmulas das A_p com $p \in \mathbb{N}$ e $p < n$; ou seja, tudo é realizado recursivamente e exaustivamente para a formalização.

Qualquer dúvida, sugestão de mudança, correção de erro ou para trocar uma ideia pode me contatar pelo *discord*: Ludwig#4351 ou pelo email *trophyhunterptbr@gmail.com.*